

УДК 517.938,534.1

А.Ю. Швец

*Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев
e-mail: alex.shvets@bigmir.net*

Регулярные и хаотические колебания свободной поверхности жидкости в цилиндрическом баке при неидеальном возбуждении

Досліджені коливання вільної поверхні рідини в циліндричному баці, які збуджуються електродвигуном обмеженої потужності. Розглянутий випадок вертикального збудження платформи циліндричного баку. Отримані і проаналізовані фазопараметричні характеристики системи. Встановлена можливість виникнення в системі "бак з рідиною електродвигун" детермінованого хаосу. Детально описані існуючі типи хаотичних атракторів. Виявлені сценарії переходів до детермінованого хаосу.

Oscillations of the free surface of a fluid in the cylindrical tank, raised electromotor a limited power, are explored. The case of vertical excitation of platform of the cylindrical tank is considered. Are obtained and analysed phase-parametric characteristics of a system. The possibility of origin in a system "tank – electromotor" of the deterministic chaos is established. Existent types of chaotic attractors are described in details and scenarios of transitions to the deterministic chaos are disclosed.

Введение. Многие современные машины, механизмы и технические устройства в качестве конструктивных элементов содержат цилиндрические баки, частично заполненные жидкостью. Поэтому исследование колебаний свободной поверхности жидкости в цилиндрических баках на протяжении последних десятилетий привлекает пристальное внимание [1, 2]. Начиная с 70-х годов прошлого века были предложены так называемые "маломерные" математические модели, описывающие такие колебания [3], [4]–[7]. Эти модели позволяют для описания колебаний свободной поверхности жидкости в баке использовать нелинейные системы обыкновенных дифференциальных

уравнений вместо уравнений в частных производных, которые возникают при описании задачи в самой общей постановке. "Маломерные" модели позволяют получить достаточно адекватное описание задачи в тех случаях, когда мощность источника возбуждения колебаний существенно превышает мощность, потребляемую колебательной нагрузкой (бак с жидкостью). Эти случаи называются идеальными по Кононенко [8]. Однако на практике чаще всего встречаются случаи, в которых мощность источника возбуждения колебаний сравнима с мощностью потребляемой колебательной нагрузкой. Такие случаи называются неидеальными [8]. В последних случаях необходимо учитывать взаимодействие между источником возбуждения колебаний и колебательной нагрузкой, что приводит к существенному уточнению применяемых в идеальных случаях математических моделей. Заметим, что пренебрежение взаимодействием между источником возбуждения колебаний и колебательной нагрузкой приводит к грубым ошибкам в описании динамики изучаемых систем [2].

Целью настоящей работы является выявление и исследование регулярных и хаотических установившихся движений системы "бак с жидкостью–электродвигатель" в случае вертикального возбуждения платформы бака. Такие исследования были начаты в работе [10], где была построена математическая модель системы, в которой учитывалось взаимодействие между источником возбуждения колебаний и баком с жидкостью.

Математическая модель системы "бак с жидкостью–электродвигатель". Рассмотрим случай вертикального возбуждения электродвигателем ограниченной мощности платформы цилиндрического бака, частично заполненного жидкостью. Схематически такая механическая система представлена на рис 4. Вал электродвигателя через кривошипно-шатунный механизм соединен с платформой, на которой закреплен жесткий цилиндрический бак радиуса R , частично заполненный жидкостью. Когда кривошип a поворачивается на угол Ψ , платформа получает перемещение вида $v(t) = a \cos \Psi(t)$. Для описания колебаний свободной поверхности жидкости введем цилиндрическую систему координат $Oxr\theta$ с началом на оси бака, на невозмущенной поверхности жидкости. Тогда уравнение рельефа свободной поверхности жидкости запишем в виде $x = \eta(r, \theta, t)$. Предположим, что жидкость, невязкая и несжимаемая с плотностью ρ и, заполняет цилиндрический бак сечения S до глубины $x = -d$.

Отыскивать функцию рельефа поверхности жидкости будем в ви-

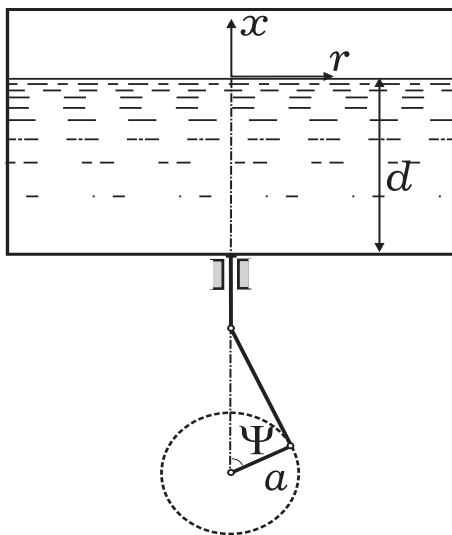


Рис. 4: Схема системы.

де разложения по собственным модам:

$$\eta(r, \theta, t) = \sum_{i,j} [q_{ij}^c(t)k_{ij}(r) \cos i\theta + q_{ij}^s(t)k_{ij}(r) \sin i\theta]. \quad (1)$$

Сохраняя все обозначения, принятые в [11], кинетическую энергию совокупной системы запишем в виде [2, 12]:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2}m_0\dot{v}^2 + \frac{1}{2}\rho S \sum_{i,j,m,n} a_{ijmn} \dot{q}_{ij}^{c,s} \dot{q}_{mn}^{c,s}. \quad (2)$$

Здесь I — момент инерции вала двигателя; m_0 — масса бака с жидкостью; a_{ijmn} — нелинейные функции от $q_{ij}^{c,s}(t)$, $q_{mn}^{c,s}(t)$ [2, 10, 12].

В свою очередь, потенциальная энергия перемещений свободной поверхности жидкости равна [4, 2]:

$$V = \rho \int_S \int_0^\eta (g + \ddot{v}) x dx = \frac{1}{2} \rho S (g + \ddot{v}) \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s}, \quad (3)$$

где g — ускорение свободного падения.

Поэтому лагранжиан системы получает вид:

$$L = \frac{1}{2}I\dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2}m_0a^2\dot{\Psi}^2 \sin^2 \Psi + \frac{1}{2}\rho S \sum_{i,j,m,n} a_{ijmn}\dot{q}_{ij}^{c,s}\dot{q}_{mn}^{c,s} + \frac{1}{2}\rho Sa(\dot{\Psi}^2 \cos \Psi + \ddot{\Psi} \sin \Psi) \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s} - \frac{1}{2}\rho Sg \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s}. \quad (4)$$

В результате для $\Psi(t)$ получаем следующее уравнение Лагранжа:

$$I\ddot{\Psi} = -2m_0a^2\dot{\Psi}^2 \sin \Psi \cos \Psi - m_0a^2\ddot{\Psi} \sin^2 \Psi + a\rho S(\dot{\Psi}^2 \sin \Psi - \ddot{\Psi} \cos \Psi) \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s} - 2a\rho S\dot{\Psi} \cos \Psi \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} \dot{q}_{ij}^{c,s} + \Phi(\Psi) - H(\Psi). \quad (5)$$

Последние два слагаемые в правой части уравнения (5) — движущий момент и момент внутренних сил сопротивления электродвигателя. Пусть скорость вращения вала $\dot{\Psi}(t)$ в установившихся режимах двигателя близка к $2\omega_1$, где ω_1 — собственная частота основного тона колебаний свободной поверхности, которая соответствует модам $q_{11}^c(t)k_{11}(r) \cos \theta$ и $q_{11}^s(t)k_{11}(r) \sin \theta$.

Введем в рассмотрение малый положительный параметр

$$\varepsilon = \omega_1 \sqrt{\frac{a}{g}}. \quad (6)$$

Также предположим, что

$$\dot{\Psi} - 2\omega_1 = \varepsilon^2 \omega_1 \beta. \quad (7)$$

Колебания свободной поверхности жидкости аппроксимируем колебаниями по основным и вторичным модам, амплитуды которых определяем в виде [2, 10, 12]:

$$\begin{aligned} q_{11}^c(t) &= \varepsilon v \left[p_1(\tau) \cos \frac{\Psi}{2} + q_1(\tau) \sin \frac{\Psi}{2} \right]; \\ q_{11}^s(t) &= \varepsilon v \left[p_2(\tau) \cos \frac{\Psi}{2} + q_2(\tau) \sin \frac{\Psi}{2} \right]; \\ q_{01}(t) &= \varepsilon^2 v \left[A_{01}(\tau) \cos \Psi + B_{01}(\tau) \sin \Psi + C_{01}(\tau) \right]; \\ q_{21}^{c,s}(t) &= \varepsilon^2 v \left[A_{21}^{c,s}(\tau) \cos \Psi + B_{21}^{c,s}(\tau) \sin \Psi + C_{21}^{c,s}(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь τ — медленное время, $\tau = \frac{1}{4}\varepsilon^2\Psi$, $v = \frac{R}{1.8412} \operatorname{th}\left(\frac{1.8412}{R}d\right)$.

Определив безразмерные амплитуды $A_{ij}^{c,s}(\tau)$, $B_{ij}^{c,s}(\tau)$, $C_{ij}^{c,s}(\tau)$ вторичных мод по методу Майлса [6, 7, 2, 12] через амплитуды $p_1(\tau)$, $q_1(\tau)$, $p_2(\tau)$, $q_2(\tau)$ и применив процедуру усреднения лагранжиана по, явно входящему быстрому времени $\Psi(t)$, для амплитуд доминантных мод получим следующую систему уравнений [2, 10, 12]:

$$\frac{dp_1}{d\tau} = \alpha p_1 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)p_2 + 2q_1;$$

$$\frac{dq_1}{d\tau} = \alpha q_1 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)q_2 + 2p_1;$$

$$\frac{d\beta}{d\tau} = N_3 + N_1\beta - \mu_1(p_1q_1 + p_2q_2);$$

$$\frac{dp_2}{d\tau} = \alpha p_2 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)p_1 + 2q_2;$$

$$\frac{dq_2}{d\tau} = \alpha q_2 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)q_1 + 2p_2.$$

(9)

Третье уравнение системы (9), как и ранее, получено из уравнения для скорости вращения вала $\dot{\Psi}$ (5) после применения процедуры усреднения и использования соотношений (7)–(8). Кроме того, в системе уравнений (9) приняты следующие обозначения:

$\alpha = -\frac{\delta}{\omega_1}$ — коэффициент дополнительных сил демпфирования

$\varepsilon^2\delta\dot{q}_{ij}^{c,s}$ колебаний жидкости; N_0, N_1 — постоянные линейной стати-

ческой характеристики электродвигателя; $N_3 = \frac{1}{\omega_1} \left(N_0 + 2N_1\omega_1 \right)$;

$\mu_1 = \frac{\rho S v R^2}{(1.8412)^2(2I + m_0 a^2)\omega_1^2}$; A и B — константы, величины которых за-

висят от диаметра бака и глубины заполнения его жидкостью [6]–[10], [12].

Система уравнений (9) используется в качестве основной математической модели при исследовании динамики колебаний бака с жидкостью, возбуждаемого электродвигателем ограниченной мощности. Заметим, что математическая модель для частного случая идеального возбуждения легко может быть получена из системы (9). В случае идеального возбуждения третье уравнение системы (9) следует от-

бросить, а в оставшихся положить $\beta = const$. В работах [4, 13] было установлено, что не существует хаотических установившихся колебаний свободной поверхности жидкости при вертикальном возбуждении платформы бака с жидкостью. Однако выводы этих работ справедливы только при рассмотрении идеальных математических моделей. Учет неидеальности возбуждения позволил обнаружить детерминированный хаос в системе "бак с жидкостью–электродвигатель" в случае вертикального возбуждения платформы бака [2, 12, 15].

Численные исследования установившихся режимов колебаний. Основной целью дальнейшего исследования является поиск и детальное изучение детерминированных хаотических движений системы (9), в ранее не изученных областях в пространстве ее параметров. Система (9) является нелинейной системой дифференциальных уравнений. Поэтому, поставленная цель практически может быть выполнена только при применении комплекса численных методов и алгоритмов. Для этого в пространстве параметров системы (9) был проведен большой комплекс компьютерных экспериментов, методика проведения которых детально описана в [2].

При проведении компьютерных вычислений предполагалось, что

$$\alpha = -0.8; \quad A = 1.12; \quad B = -1.531; \quad N_3 = -0.25; \quad N_1 = -1.25. \quad (10)$$

Начальные условия варьировались в окрестности начала координат фазового пространства системы уравнений (9).

Первоначально в качестве бифуркационного параметра рассматривался параметр μ_1 , который характеризует взаимосвязь между баком с жидкостью и электродвигателем. Заметим, что данный параметр является мультипараметром, то есть его значение зависит от значений целого ряда параметров системы "бак с жидкостью–электродвигатель". Например, от массы бака с жидкостью, плотности жидкости, радиуса бака, момента инерции вала двигателя, длины кривошипа и т.д. Поэтому изучение бифуркаций по параметру μ_1 фактически эквивалентно изучению бифуркаций по многим параметрам, определяющим величину μ_1 .

В работе [15] доказано, что, при так выбранных значениях параметров системы (9), данная система будет диссипативной. Следовательно, в ней обязательно существуют аттракторы, которые, как мы увидим в дальнейшем, могут быть как регулярными, так и хаотическими. Основным практическим критерием регулярности или хаотичности аттрактора является наличие в спектре его ляпуновских

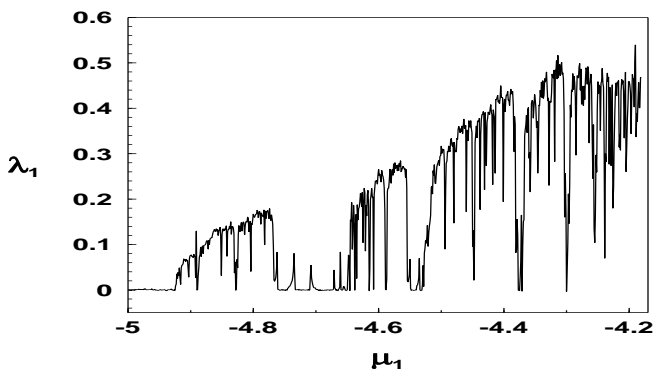


Рис. 5: Зависимость максимального ляпуновского показателя λ_1 от параметра μ_1 .

характеристических показателей, хотя бы одного положительного показателя [9]. На рис. 2 приведена зависимость максимального ляпуновского характеристического показателя λ_1 от значений параметра μ_1 . Данная зависимость построена при помощи алгоритма Бенеттина [2, 17]. Как видно из приведенного рисунка, исследованная область изменения μ_1 ($\mu_1 \in (-5, -4.17)$) практически полностью покрывается интервалами, в которых максимальный ляпуновский показатель имеет положительное значение. Следовательно, в этих интервалах положительности максимального ляпуновского показателя динамика системы (9) будет хаотической, а аттракторами — будут хаотические аттракторы. Малый шаг изменения по параметру μ_1 , равный 0.0001, позволил обнаружить многочисленные подходы графика λ_1 к нулевому значению. Это так называемые "окна регулярности" в хаосе [9]. В таких окнах, как показали дальнейшие исследования, аттракторами системы являются предельные циклы.

На рис. 3 приведена фазопараметрическая характеристика (бифуркационное дерево) системы (9). Данная фазопараметрическая характеристика построена при помощи метода Ено [2, 10] относительно переменной p_1 . Фазопараметрические характеристики относительно других переменных системы качественно подобны приведенной на

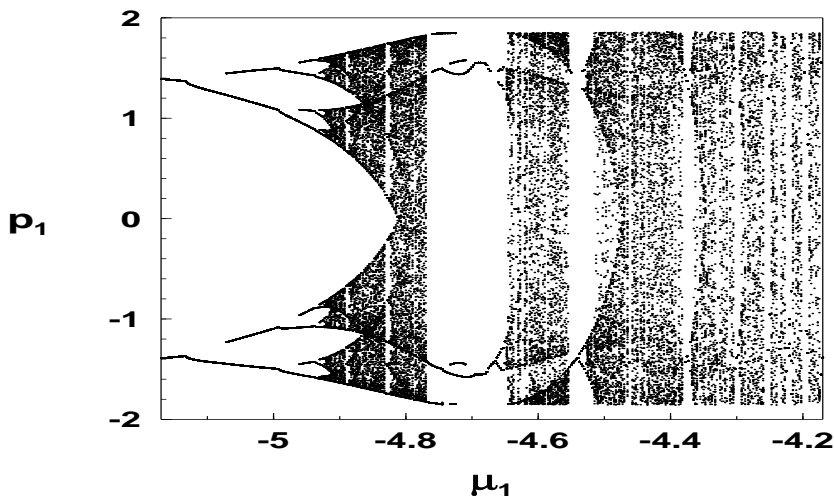


Рис. 6: Фазопараметрическая характеристика системы относительно μ_1

рис. 3. Густо затемненные области приведенной характеристики соответствуют установившимся хаотическим режимам, а состоящие из отдельных ветвей — регулярным режимам, которые в данном случае являются периодическими. В левой части рис. 3 видны точки раздвоения ветвей бифуркационного дерева, которые соответствуют бифуркациям удвоения периода предельных циклов. При внимательном изучении рис. 3 в хаотической области фазопараметрической характеристики можно обнаружить ряд практически белых вертикальных полос, соответствующих окнам периодичности в хаосе. Следует отметить, что эти окна наблюдаются при тех значениях параметра μ_1 , при которых происходят провалы графика ляпуновского характеристического показателя (рис. 2) к нулевому значению ординаты.

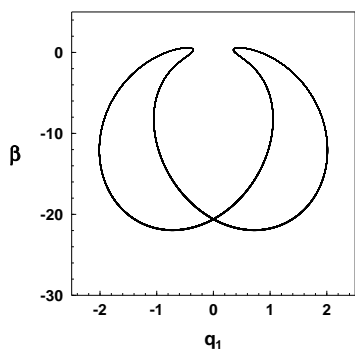
Рассмотрим более детально типы регулярных и хаотических ат-

тракторов, которые существуют в системе (9) при изменении параметра μ_1 . Так, при $\mu_1 = -5.15$ в системе существует предельный цикл, проекция фазового портрета которого приведена на рис. 7а. Как видно из фазопараметрической характеристики, при увеличении значений μ_1 в системе происходит каскад бифуркаций удвоения периода предельных циклов. Первая бифуркация данного каскада происходит при $\mu_1 \approx -5.07$. На рис. 7б–г приведены, соответственно, исходный предельный цикл и три первых бифуркации удвоения периода цикла. При каждой бифуркации тактность циклов увеличивается вдвое.

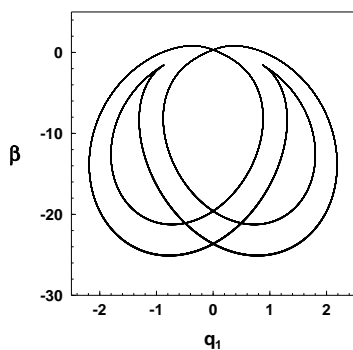
Описанный бесконечный каскад бифуркаций удвоения завершается возникновением в системе хаотического аттрактора при $\mu_1 \approx -4.92$. На рис. 8а–б приведены, соответственно, двух- и трехмерная проекции фазового портрета хаотического аттрактора такого типа, построенные при значении $\mu_1 = -4.9$. Переход от регулярных движений к хаотическим здесь осуществляется по сценарию Фейгенбаума [2, 19].

На рис. 9 приведены Фурье–спектры, описанного выше процесса перехода к детерминированному хаосу. Так, на рис. 9а–в приведены, соответственно, Фурье–спектры исходного предельного цикла и двух первых бифуркаций удвоения периода. Структура данных спектров типична для предельных циклов. Все они являются дискретными и гармоническими. При каждой бифуркации удвоения наблюдаются удвоения числа спектральных пиков. В свою очередь на рис. 9г приведен Фурье–спектр возникающего хаотического аттрактора, построенный при значении $\mu_1 = -4.9$. Структура этого спектра, а именно, его непрерывность является еще одним фактором, подтверждающим хаос в системе (9) при $\mu_1 = -4.9$. Следует отметить полное разрушение спектральных пиков Фурье–спектра хаотического аттрактора. Это связано с тем, что данный спектр построен в некотором отдалении от порога хаотичности $\mu_1 \approx -4.92$.

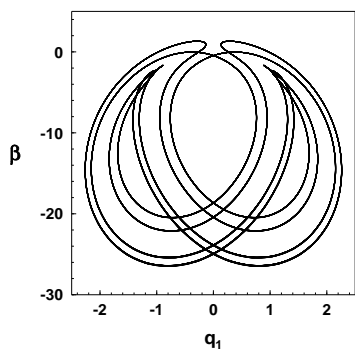
Теперь рассмотрим некоторые аспекты динамического поведения системы при переходе к хаосу через левую границу окна периодичности. Как видно из рис. 2–3, такие окна типичны для системы (9). Заметим, что уменьшение величины шага изменения по параметру μ_1 позволяет при каждом таком уменьшении выявлять новые окна периодичности. Однако ширина таких окон становится настолько малой, что отображение их на фазопараметрической характеристике (рис. 3) или на графике зависимости максимального ляпуновского показа-



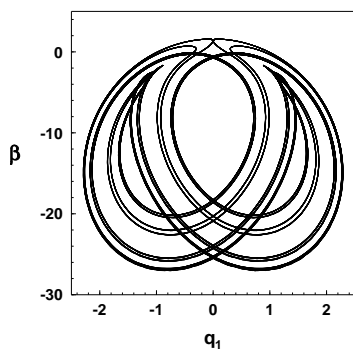
а



б



в



г

Рис. 7: Проекция каскада бифуркаций удвоения периода.

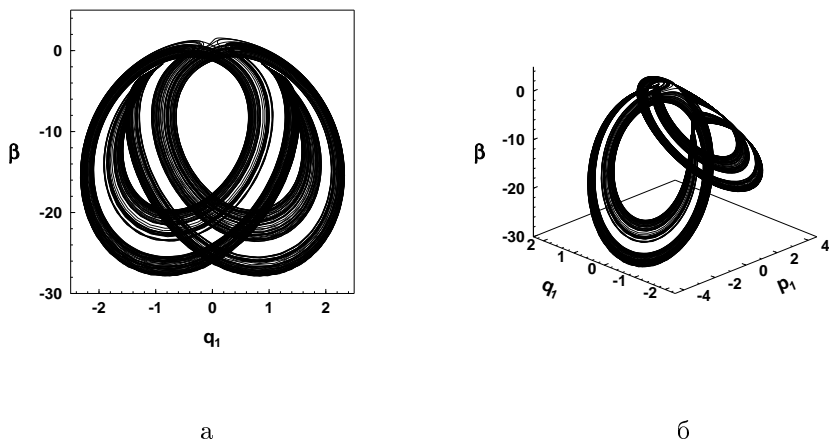
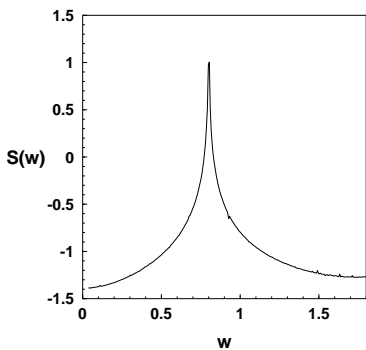


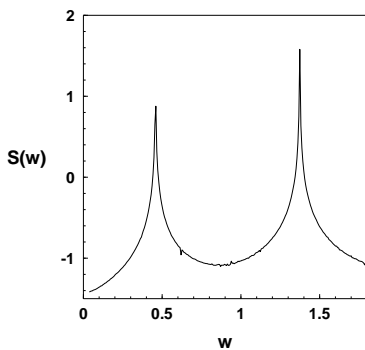
Рис. 8: Проекция фазового портрета хаотического аттрактора при $\mu_1 = -4.9$.

теля от параметра (рис. 2) практически невозможно, в применяемых на этих рисунках масштабах.

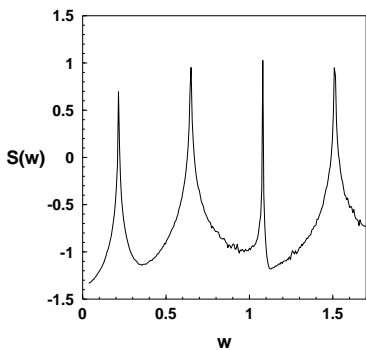
Одно из окон периодичности системы существует в окрестности точки $\mu_1 = -4.828$. Аттрактором системы в этом окне является предельный цикл, проекция фазового портрета которого, построенная при $\mu_1 = -4.828$ приведена на рис. 10а. Период этого цикла не равен периоду любого из циклов, которые были ранее рассмотрены при изучении каскада Фейгенбаума. При незначительном уменьшении значения μ_1 данный цикл исчезает и в системе возникает хаотический аттрактор. На рис. 10б приведена проекция распределения инвариантной меры по фазовому портрету хаотического аттрактора, построенная при $\mu_1 = -4.83035$. Такое распределение получено при помощи компьютерной техники кодировки цветовыми оттенками, описанной в [2]. Рис. 10б дает представление не только о структуре возникающего хаотического аттрактора, но и наглядно проясняет сценарий перехода к хаосу. Так, внимательное изучение рис. 10а–б позволяет заметить, что жирно прорисованные линии на рис. 10б почти совпадают с фазовым портретом цикла с рис. 10а. Это свидетельствует о том, что переход к хаосу осуществляется через перемежаемость по



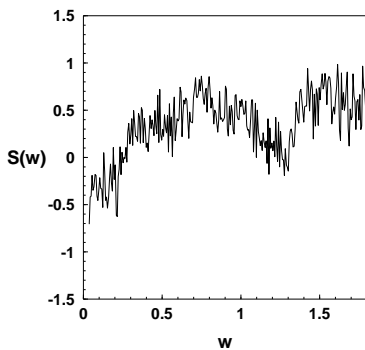
а



б



в



г

Рис. 9: Фурье-спектры исходного предельного цикла (а), двух бифуркаций удвоения периода (б–в) и возникающего хаотического аттрактора (г).

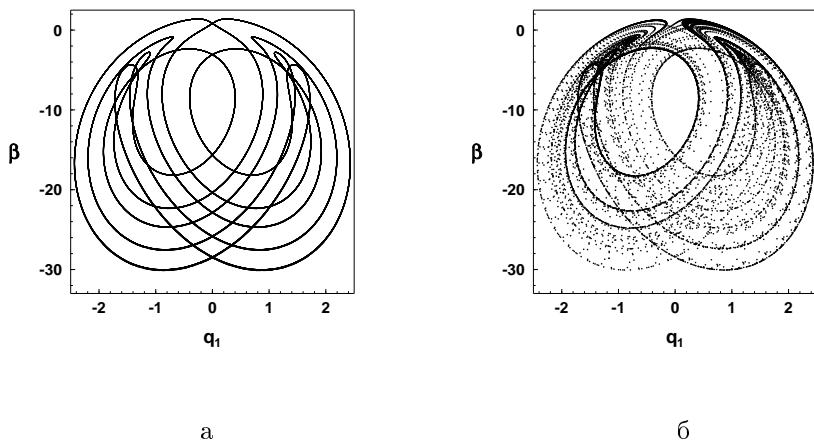


Рис. 10: Проекция фазового портрета предельного цикла при $\mu_1 = -4.828$ и распределения инвариантной меры по фазовому портрету хаотического аттрактора при $\mu_1 = -4.83035$.

Помо–Манневиллю [2, 9]. При прохождении точки бифуркации предельный цикл исчезает и в системе возникает хаотический аттрактор, движение траекторий по которому состоит из двух фаз. Ламинарной фазой является близкое к периодическому движение траекторий в окрестности исчезнувшего предельного цикла (жирно прочерченные линии на рис. 10б). Турбулентной фазой являются уходы траекторий в более отдаленные, от исчезнувшего цикла, области фазового пространства. Это светло-серые области на рис. 10б. Чередование (перемежаемость) ламинарной и турбулентной фазы происходит бесконечное число раз. Моменты времени перехода от ламинарной фазы к турбулентной и наоборот заранее непредсказуемы наперед.

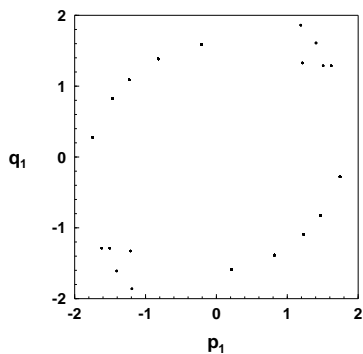
На рис. 11а–б приведены, соответственно, проекции сечения Пуанкаре плоскостью $\beta = -5$ (построенные при помощи метода Эно [10]) предельного цикла при $\mu_1 = -4.828$ и хаотического аттрактора при $\mu_1 = -4.83035$. Сечение Пуанкаре данного предельного цикла состоит из двадцати точек, число которых остается неизменным при как угодно большом увеличении времени численного интегрирования системы (9). Такое дискретное точечное множество является

строго упорядоченным. Сечение же Пуанкаре хаотического аттрактора представляет собой хаотическое точечное множество. Число точек этого хаотического множества возрастает с увеличением времени численного интегрирования, однако никакие две точки данного множества не могут совпасть друг с другом. Порядок попадания точек на секущую Пуанкаре непредсказуем. Заметим, что построенное сечение Пуанкаре хаотического аттрактора имеет квазиленточную структуру [12].

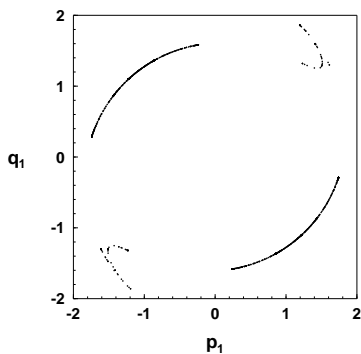
На рис. 11в–г приведены Фурье–спектры предельного цикла при $\mu_1 = -4.828$ и хаотического аттрактора при $\mu_1 = -4.83035$. Фурье–спектр предельного цикла при $\mu_1 = -4.828$ (рис. 11в) дискретный и гармонический, однако спектральные пики наблюдаются в нем на иных частотах, чем у предельных циклов, спектры которых приведены на рис. 9а–в. Фурье–спектр хаотического аттрактора при $\mu_1 = -4.83035$ непрерывный, но с менее разрушенными спектральными пиками, чем на рис. 9г.

Кратко остановимся на структуре хаотических аттракторов, существующих при дальнейшем увеличении μ_1 . Здесь наблюдается усложнение структуры хаотических аттракторов системы (9). Так, на рис. 12а–б приведены проекции фазовых портретов хаотических аттракторов системы, построенных соответственно при значениях $\mu_1 = -4.6$ и $\mu_1 = -4.28$. Как видно из приведенных рисунков, по мере увеличения μ_1 наблюдается усложнение структуры хаотических аттракторов системы. Фазовые траектории более плотно заполняют области локализации аттракторов в фазовом пространстве. Кроме того, заметно увеличиваются объемы таких областей локализации, что свидетельствует о возрастании амплитуд колебаний фазовых переменных. На рис. 12в–г приведены проекции сечений Пуанкаре плоскостью $\beta = -5$ хаотических аттракторов соответственно при $\mu_1 = -4.6$ и $\mu_1 = -4.28$. Как видно из этих рисунков, увеличение значений μ_1 также приводит к усложнению структуры сечений Пуанкаре, например, по сравнению со случаем, представленным на рис. 11в. При приближении значения μ_1 к правой границе рассмотренной области его изменения сечения Пуанкаре существующих в системе (9) хаотических аттракторов утрачивают квазиленточную структуру.

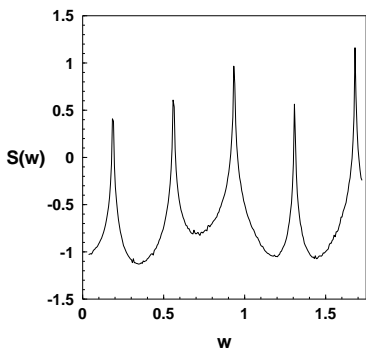
Заключение. Таким образом, применение неидеальной маломерной математической модели для описания колебаний свободной поверхности жидкости в цилиндрическом баке позволяет выявлять детерминированный хаос в случае вертикального возбуждения платформы



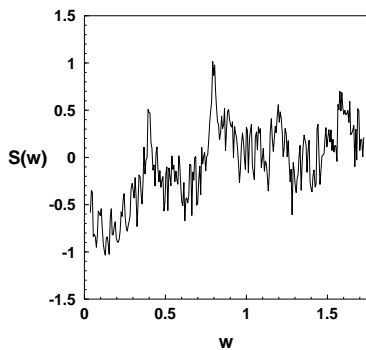
а



б

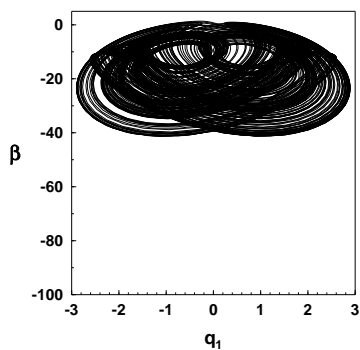


в

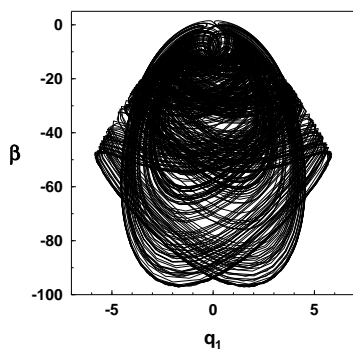


г

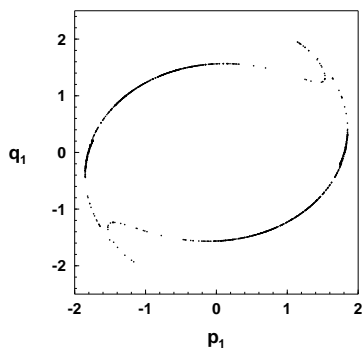
Рис. 11: Проекция сечения Пуанкаре (а) и Фурье-спектр (в) предельного цикла при $\mu_1 = -4.828$ (а); проекция сечения Пуанкаре (б) и Фурье-спектр (г) хаотического аттрактора при $\mu_1 = -4.83035$ (б).



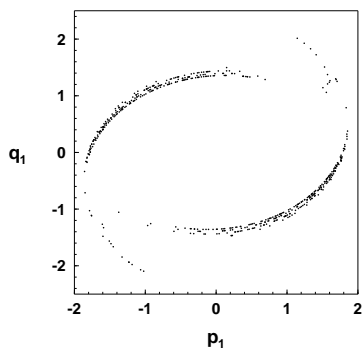
а



б



в



г

Рис. 12: Проекция фазового портрета и сечения Пуанкаре хаотического аттрактора при $\mu_1 = -4.6$ (а, в) и при $\mu_1 = -4.28$ (б, г).

бака. Обнаружены разнообразные хаотические режимы и сценарии перехода к хаосу в ранее не исследованных областях в пространстве параметров системы "бак с жидкостью–электродвигатель". Построенная фазопараметрическая характеристика системы позволяет, как находить области детерминированного хаоса, так и выяснять тип перехода от регулярных режимов к хаотическим.

Литература

- [1] Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. — М.: Машиностроение, 1977. — 206 с.
- [2] Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов.—М.: Машиностроение, 1983. — 296 с.
- [3] Луковский И.А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы. — Киев: Наукова думка, 1975. — 136 с.
- [4] Miles J. W. Nonlinear surface waves in closed basins // J. Fluid Mech. — 1976. — **75**, №3. — P. 419–448.
- [5] Miles J. W. Internally resonant surface waves in circular cylinder // J. Fluid Mech. — 1984. — **149**. — P. 1–14.
- [6] Miles J. W. Resonantly forced surface waves in circular cylinder // J. Fluid Mech. — 1984. — **149**. — P. 15–31.
- [7] Miles J. W., Henderson D. Parametrically forced surface waves // Ann. Rev. Fluid Mech. — 1990. — **22**. — P. 143–165.
- [8] Kononenko V. O. Vibrating system with a limited power-supply. — London: Iliffe, 1969. — 236 p.
- [9] Краснопольская Т. С., Швец А. Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. — Москва; Ижевск: R&CD, 2008. — 280 с.
- [10] Краснопольская Т.С., Швец А.Ю Структура хаоса при колебаниях жидкости в цилиндрических баках // Мат. методы исслед. прикладных задач динамики тел, несущих жидкость. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. — С. 52–66.

- [11] Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. О резонансных явлениях при нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами // Прикл. механика. — 1993. — **15**, № 9. — С. 100–107.
- [12] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations // J. Fluids & Structures.— 1994.— **8**, №1.— P.1–18.
- [13] Краснопольская Т. С., Подчасов Н. Л. Резонансы и хаос при неосесимметричных динамических процессах в гидроупругих системах // Прикл. механика. — 1993. — **29**, № 12. — С. 72–77.
- [14] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Chaos in vibrating systems with limited power-supply // Chaos. — 1993. — **3**, № 3. — P.387–395.
- [15] Швец А.Ю. Динамический хаос в системе "бак с жидкостью — электродвигатель" // Динамические системы.— 2007. — №22. — С. 46–62.
- [16] Кузнецов С.П. Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2001. — 295с.
- [17] Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.M. Kolmogorov entropy and numerical experiments // Phys. Rev. A. — 1976. — **14**, № 6. — P. 2338–2342.
- [18] Henon M. On the numerical computation of Poincare maps // Physica. D. — 1982. — **5**, № 2. — P. 412–415.
- [19] Feigenbaum M.J. Quantative universality for a class of nonlinear transformations // J.Stat. Phys. — 1978. — **19**, № 1. — P. 25–52.
- [20] Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990. — 312 с.